Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
2. Klausur

Freitag, 7. Mai 2021 (Vormittag)

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Abschnitt A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Abschnitt B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antworthefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.

2221 – 7127

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, sollten von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 6]

In einem Café hängt die Wartezeit zwischen der Bestellung und dem Erhalt einer Tasse Kaffee von der Anzahl der Kunden ab, die ihren Kaffee bereits vorher bestellt haben und noch darauf warten.

Die Stammkundin Sarah hat das Café an fünf aufeinander folgenden Tagen besucht. Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl x der Kunden, die am jeweiligen Tag bereits vor Sarah bestellt hatten und noch auf ihren Kaffee warteten, sowie Sarahs Wartezeit y in Minuten.

Anzahl der Kunden (x)	3	9	11	10	5
Sarahs Wartezeit (y)	6	10	12	11	6

Die Beziehung zwischen x und y kann modelliert werden durch die Regressionsgerade von y auf x mit der Gleichung $y = ax + b$.

(a) (i) Finden Sie die Werte von a und b.

(ii) Notieren Sie den Wert des Pearsonschen Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten r. [3]

(b) Interpretieren Sie in diesem Kontext den in Teil (a)(i) ermittelten Wert von a. [1]

An einem anderen Tag besucht Sarah erneut das Café und bestellt einen Kaffee. Sieben Kunden haben vor ihr einen Kaffee bestellt und warten noch darauf.

(c) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teil (a)(i) und schätzen Sie damit Sarahs Wartezeit, bis sie ihren Kaffee erhält. [2]

2. [Maximale Punktzahl: 5]

Eine arithmetische Folge hat den ersten Term 60 und eine gemeinsame Differenz von $-2,5$.

(a) Der k-te Term der Folge sei Null. Finden Sie den Wert von k. [2]

Sei S_n die Summe der ersten n Folgenterme.

(b) Finden Sie den Maximalwert von S_n. [3]

3. [Maximale Punktzahl: 8]

An einer Schule üben 70% der Schülerinnen und Schüler eine Sportart aus, und 20% der Schülerinnen und Schüler spielen in der Theater-AG mit. 18% der Schülerinnen und Schüler üben keine dieser beiden Tätigkeiten aus.

Eine Schülerin bzw. ein Schüler wird nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

(a) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der/die ausgewählte Schüler(in) einen Sport ausübt und Theater spielt. [2]

(b) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der/die ausgewählte Schüler(in) zwar Theater spielt, jedoch keinen Sport ausübt. [2]

An dieser Schule gibt es 48% Mädchen, und 25% der Mädchen spielen Theater.

Wieder wird eine Schülerin bzw. ein Schüler nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Sei G das Ereignis „ein Mädchen wurde ausgewählt“ und T das Ereignis „der/die Ausgewählte spielt Theater“.

(c) Finden Sie $\mathrm{P}(G \cap T)$. [2]

(d) Bestimmen Sie, ob die Ereignisse G und T unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Antwort. [2]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

4. [Maximale Punktzahl: 6]

Die Funktionen f und g sind definiert für $x \in \mathbb{R}$ durch $f(x) = 6x^2 - 12x + 1$ bzw. $g(x) = -x + c$, mit $c \in \mathbb{R}$.

(a) Finden Sie den Wertebereich von f. [2]

(b) Sei $(g \circ f)(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge aller möglichen Werte für c. [4]

5. [Maximale Punktzahl: 7]

Alle lebenden Pflanzen enthalten ein Kohlenstoffisotop namens C-14. Wenn eine Pflanze stirbt, zerfällt das Isotop, so dass die in den Pflanzenresten vorhandene Menge an C-14 abnimmt. Die Zeit seit dem Absterben einer Pflanze kann bestimmt werden, indem die in den Überresten vorhandene Menge an C-14 gemessen wird.

Die Menge A an C-14-Atomen, die in einer Pflanze t Jahre nach ihrem Absterben noch vorhanden ist, kann modelliert werden durch $A = A_0 e^{-kt}$ mit $t \geq 0$ und positiven Konstanten A_0, k.

Zum Zeitpunkt des Absterbens enthalte eine Pflanze 100 Einheiten C-14.

(a) Zeigen Sie, dass $A_0 = 100$. [1]

Man weiß, dass die Zeit bis zum Zerfall der Hälfte der ursprünglichen Menge an C-14 etwa 5730 Jahre beträgt.

(b) Zeigen Sie, dass $k = \dfrac{\ln 2}{5730}$. [3]

(c) Finden Sie mit einer Genauigkeit von 10 Jahren die Zeitdauer nach dem Absterben der Pflanze, bis $25\,\%$ des C-14-Gehalts zerfallen sind. [3]

6. [Maximale Punktzahl: 6]

Eine stetige Zufallsvariable X besitze die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion f_n:

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x^n, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $n \in \mathbb{R}$, $n \ge 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{E}(X) = \dfrac{n+1}{n+2}$. [2]

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{n+1}{(n+2)^2(n+3)}$. [4]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

7. [Maximale Punktzahl: 5]

Acht Läuferinnen und Läufer nehmen an einem Rennen teil, bei dem es keinen unentschiedenen Ausgang (gleichzeitiger Zieleinlauf) gibt. Andrea und Jack sind zwei der acht Teilnehmer dieses Rennens.

Finden Sie die Gesamtzahl der Möglichkeiten, wie die acht Läufer ins Ziel kommen können, wenn gilt:

(a) Jack kommt in der Position unmittelbar nach Andrea ins Ziel; [2]

(b) Jack kommt in einer beliebigen Position nach Andrea ins Ziel. [3]

8. [Maximale Punktzahl: 5]

Es sei $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ mit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$.

Zeigen Sie, dass für den Realteil Re gilt: $\mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 0$.

9. [Maximale Punktzahl: 8]

(a) Notieren Sie die ersten drei Terme der Binomialentwicklung von $(1+t)^{-1}$ in ansteigenden Potenzen von t. [1]

(b) Zeigen Sie unter Verwendung der Maclaurinschen Reihe für $\cos x$ und Ihrem Ergebnis aus Teil (a), dass die Maclaurinsche Reihe für $\sec x$ bis einschließlich x^4 der Term $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}$ ist. [4]

(c) Finden Sie unter Verwendung der Maclaurinschen Reihe für $\arctan x$ und Ihrem Ergebnis aus Teil (b) den Grenzwert für: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\arctan 2x}{\sec x-1}\right)$. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 15]

Die Flugzeiten T in Minuten zwischen zwei Städten können durch eine Normalverteilung mit einem Mittelwert von 75 Minuten und einer Standardabweichung von σ Minuten modelliert werden.

(a) Angenommen, 2% der Flugzeiten seien länger als 82 Minuten. Finden Sie hieraus den Wert von σ. [3]

(b) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Flug länger als 80 Minuten dauern wird. [2]

(c) Angenommen, ein Flug zwischen den beiden Städten dauere länger als 80 Minuten. Finden Sie dann die Wahrscheinlichkeit, dass er weniger als 82 Minuten dauert. [4]

An einem bestimmten Tag sind 64 Flüge zwischen diesen beiden Städten geplant.

(d) Finden Sie die zu erwartende Anzahl an Flügen, die länger als 80 Minuten dauern werden. [3]

(e) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 6 der Flüge an diesem Tag länger als 80 Minuten dauern werden. [3]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

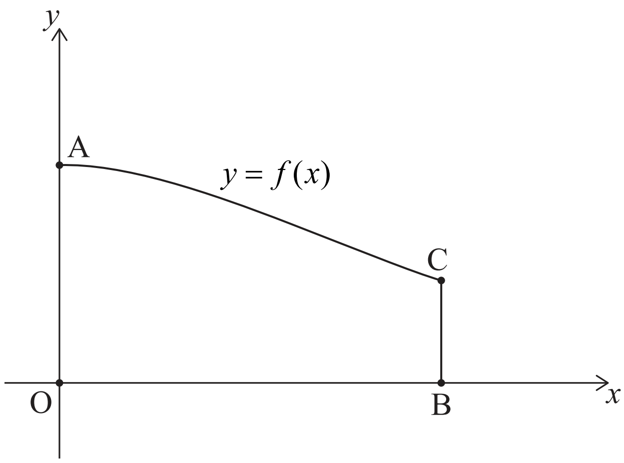
11. [Maximale Punktzahl: 18]

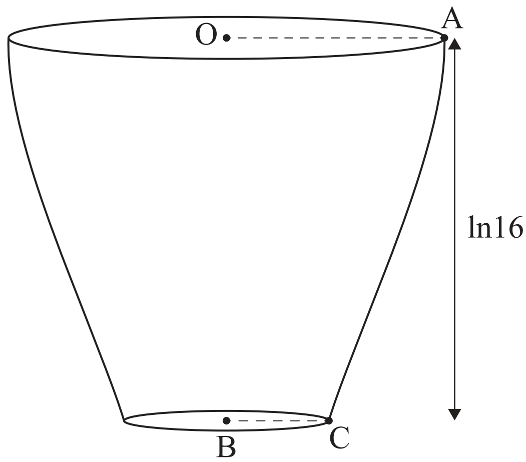
Die Funktion f ist definiert durch $f(x)=\dfrac{ke^{\frac{x}{2}}}{1+e^{x}}$ mit $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ und $k \in \mathbb{R}^{+}$.

Die Fläche zwischen dem Graphen von $y=f(x)$, der x-Achse, der y-Achse und der Geraden $x=\ln 16$ wird um $360°$ um die x-Achse rotiert, wodurch ein Rotationskörper entsteht.

(a) Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Rotationskörpers $\dfrac{15k^{2}\pi}{34}$ Volumeneinheiten beträgt. [6]

Mit dem Ergebnis aus Teil (a) möchte Pedro eine kleine Schale mit einem Volumen von $300\,\text{cm}^3$ herstellen. Pedros Entwurf ist in den folgenden Zeichnungen dargestellt.





Die Höhe BO der Schale wird entlang der x-Achse gemessen. Der Radius der Schalenoberseite ist OA und der Radius der Schalenunterseite ist BC. Alle Längen werden in cm gemessen.

(b) Finden Sie den Wert von k, der die Anforderungen von Pedros Entwurf erfüllt. [2]

(c) Finden Sie die folgenden Längen:

(i) OA;

(ii) BC. [4]

Während des Entwurfs untersucht Pedro, wie sich der Querschnittsradius der Schale verändert.

(d) (i) Skizzieren Sie den Graphen einer geeigneten Ableitung von f, und finden Sie den Punkt, an dem der Querschnittsradius der Schale am schnellsten abnimmt.

(ii) Geben Sie den Querschnittsradius der Schale an diesem Punkt an. [6]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 21]

Die Funktion f ist definiert durch $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass f eine gerade Funktion ist. [1]

(b) Zeigen Sie durch Grenzwertuntersuchungen, dass der Graph von $y = f(x)$ eine horizontale Asymptote besitzt, und geben Sie deren Gleichung an. [2]

(c) (i) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2}\left(x^2+1\right)}$ für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

(ii) Zeigen Sie unter Verwendung des Terms von $f'(x)$ und der Tatsache $\sqrt{x^2} = |x|$, dass f für $x < 0$ abnimmt. [9]

Die Funktion g ist definiert durch $g(x) = \arcsin\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$.

(d) Finden Sie einen Ausdruck für $g^{-1}(x)$, und begründen Sie Ihre Antwort. [5]

(e) Geben Sie die Definitionsmenge von g^{-1} an. [1]

(f) Skizzieren Sie den Graphen von $y = g^{-1}(x)$, und geben Sie dabei alle Asymptoten mit ihren Gleichungen sowie die Werte der Schnittpunkte mit den Achsen klar an. [3]

Quellen:

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.